

- (1) Sei $L : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein Funktor. Konstruiere eine maximale volle Unterkategorie $\iota : \mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$ und einen Funktor $R : \mathcal{D}_0 \rightarrow \mathcal{C}$ der “zu L partiell rechtsadjungiert ist” (also: es gibt eine natürliche Transformation $c : LR \rightarrow \iota$ so, dass für alle $c \in \mathcal{C}$ und $d \in \mathcal{D}_0$ die Komposition $\text{Map}_{\mathcal{C}}(c, Rd) \xrightarrow{L} \text{Map}_{\mathcal{D}}(Lc, LRd) \xrightarrow{c} \text{Map}_{\mathcal{D}}(Lc, d)$ eine Äquivalenz ist). [Tipp: Kan-Erweiterung.]
- (2) Seien I, \mathcal{C} ∞ -Kategorien, so dass in \mathcal{C} alle Limiten von Form I existieren. Konstruiere den Funktor $\lim_I : \text{Fun}(I, \mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$.
- (3) Sei I eine filtrierte ∞ -Kategorie. Zeige, dass $Ex(I) = *$.
- (4) Sei I κ -filtrierte und K κ -klein. Zeige, dass für jeden Funktor $p : K \rightarrow I$ auch $I_p/$ κ -filtrierte ist.
- (5) Eine ∞ -Kategorie I heißt *gesifted* wenn $I \neq \emptyset$ und $\Delta : I \rightarrow I \times I$ kofinal. Zeige: κ -filtrierte ∞ -Kategorien sind gesifted.
- (6) Zeige, dass Δ^{op} gesifted ist. [Tipp: Seien $[m], [n] \in \Delta$. Sei $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C} := \Delta_{/[m]} \times_{\Delta} \Delta_{/[n]}$ die volle Unterkategorie auf den monomorphismen $J \rightarrow [m] \times [n]$. Zeige, dass $\mathcal{C}_0 \rightarrow \mathcal{C}$ einen Linksadjungierten hat, und dass \mathcal{C}_0 die baryzentrische Unterteilung von $\Delta^m \times \Delta^n$ ist.]
- (7) Seien $X \in \text{Spc}$, $\mathcal{C} \in \text{Cat}_{\infty}$ und $p : \mathcal{C} \times X \rightarrow \mathcal{C}$ die Projektion. Zeige, dass p eine Linksfasering ist. Was ist der korrespondierende Funktor $\mathcal{C} \rightarrow \text{Spc}$? Zeige, dass $\text{Fun}(\mathcal{C}, X) \simeq \lim_{\mathcal{C}} p$. Schlussfolgere, dass $Ex(\mathcal{C}) \simeq \text{colim}_{\mathcal{C}} * \in \text{Spc}$.
- (8) Sei \mathcal{C} gesifted. Zeige, dass $Ex(\mathcal{C}) = *$.